Varianta A - Algebră și analiză matematică

1	Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 1] \\ ax+1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a pentru care funcția este continuă în $x_0 = 1$.								
a)	0	b)	-1	c)	1	d)	2	e)	3

2	Să se determine valorile reale a pentru care $x^2 + y^2 - x + y + a > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.								
a)	$a < \frac{1}{2}$	b)	$a \le \frac{1}{2}$	c)	$a = \frac{1}{2}$	d)	$a > \frac{1}{2}$	e)	$a \ge \frac{1}{2}$

3	Să se determine numărul de soluții ale ecuației $2021^x = 2020^{x-1} + 2019^{x-2} + 1$.								
a)	1	b)	2	c)	0	d)	3	e)	4

4	Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = 0$.								
a)	$m = -1$	b)	$m = 3$	c)	$m = 4$	d)	$m = 0$	e)	$m = 1$

5	Se definește legea de compoziție "*" prin: $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, unde $x, y \in [1, \infty)$. Elementul $1 * 1$ este:								
a)	2	b)	4	c)	8	d)	1	e)	0

6	Numărul $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$ este egal cu:								
a)	$\frac{3}{4}$	b)	$\frac{1}{6}$	c)	$\frac{1}{3}$	d)	$\frac{1}{4}$	e)	1

7	Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \left(\frac{4x^2 + x - 1}{2x^2 - 1} + \frac{3}{x+2} \right)$.								
a)	$-\infty$	b)	∞	c)	4	d)	-1	e)	5

8	Să se determine domeniul de definiție pentru funcția $f(x) = \sqrt{x - 4}$.								
a)	$[-2, 2]$	b)	$(-4, 4)$	c)	$[4, \infty)$	d)	$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$	e)	$(-2, 2)$

9	Mulțimea valorilor reale a pentru care sistemul $\begin{cases} ax + y = -1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$ nu are soluții este:								
a)	$\{-1, 1\}$	b)	$\emptyset$	c)	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	d)	$\{1\}$	e)	$\{-1\}$

10	Să se determine aria suprafeței plane determinate de graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\lvert x \rvert^{2021}}{e^x + 1}$ și dreptele de ecuații $x = -1$ respectiv $x = 1$.								
a)	$\frac{1}{2022}$	b)	$\frac{1}{2012}$	c)	$\frac{1}{2020}$	d)	$\frac{1}{1011}$	e)	$\frac{1}{2021}$

11	Mulțimea primitivelor funcției $f: (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x + ln(x)$ este:								
a)	$\frac{x^2}{2} + ln(x) + C,\ C \in R$	b)	$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C,\ C \in R$	c)	$1 + \frac{1}{x} + C,\ C \in R$	d)	$\frac{x^2}{2} + ln(x) - x + C,\ C \in R$	e)	$\frac{x^2}{2} + xln(x) - x + C,\ C \in R$

12	Aflați restul împărțirii polinomului $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 4$ la $X - 2$.								
a)	0	b)	5	c)	1	d)	-1	e)	10

13	Fie $f: \mathbb{R} \to (-8, \infty), f(x) = 9^{x+1} + 4 \cdot 3^x - 8$. Să se calculeze $(f^{-1})'(85)$.								
a)	$\frac{1}{156 \cdot ln3}$	b)	$\frac{1}{162 \cdot ln3}$	c)	$\frac{1}{174 \cdot ln2}$	d)	$\frac{1}{156 \cdot ln2}$	e)	$\frac{1}{174 \cdot ln3}$

14	În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{\frac{1}{a^3}} - 2\sqrt[3]{a}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este 512. Să se determine rangul termenului care îl conține pe $\frac{1}{a^4}$.								
a)	0	b)	6	c)	7	d)	4	e)	10

15	Se dă numărul complex $z = \frac{1-i}{1+i}$. Atunci $\lvert z \rvert$ este:								
a)	0	b)	2	c)	1	d)	$-i$	e)	-1

16	Dacă $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ verifică egalitatea $$\sqrt{x_1 - 1} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \cdots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$ atunci valoarea limitei $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{x_i})^3}{n^4+1}$ este:								
a)	1	b)	2	c)	0	d)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	e)	∞

17	Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^5 - x^3$.								
a)	4	b)	5	c)	2	d)	1	e)	3

18	Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$, cu $a_4 = 8, a_2 = 4$. Valoarea lui a_3 este:								
a)	2	b)	6	c)	4	d)	1	e)	0

19	Să se calculeze $\int_{-1}^{0} \lvert x \rvert \, dx$.								
a)	$\frac{1}{4}$	b)	$\frac{1}{2}$	c)	0	d)	2	e)	$-\frac{1}{2}$

20	Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție "*" prin $x * y = ax + by + 3$. Să se determine a și b astfel încât legea "*" să fie asociativă și să admită element neutru.								
a)	$a = 1$ $b = 1$	b)	$a = 2$ $b = 2$	c)	$a = 0$ $b = 1$	d)	$a = 1$ $b = 0$	e)	$a = -1$ $b = 1$